EXERCICES

Exercice 1 : Intégrales de Wallis

On considère la suite $(I_n)_n$ définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)^n dt$$

PARTIE 1 - CALCUL DES PREMIERS TERMES

— 1. Calculer I_0 et I_1.
— 2. Soit n un entier naturel, $n > 1$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = sin(x)cos(x)^n$.
Montrer que $f'(x) = (n+1)cos(x)^{n+1} - ncos(x)^{n-1}$.
— 3. En déduire que pour tout entier naturel $n > 1$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
— 4. Calculer I_2 et I_3.

PARTIE 2 - ÉTUDE DE LA CONVERGENCE

— 1. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.
— 2. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est convergente.
— 3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
— 4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

PARTIE 3 - NOTION D'ÉQUIVALENCE

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à valeurs réelles qui ne s'annulent pas.
On dit que $(u_n)_n$ est équivalent à $(v_n)_n$ et on note $u_n \sim v_n$ si :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

— 1. Montrer que $u_n \sim u_n$. La relation $\sim$ est alors dite "réflexive".
— 2. Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$. La relation $\sim$ est alors dite "symétrique".
— 3. Soit $(w_n)_n$ une suite à valeur réelle qui ne s'annule pas.
Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$. La relation $\sim$ est dite "transitive".
— 4. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $x_n \sim y_n$ alors $u_nx_n \sim w_ny_n$.

Remarque : Si deux suites sont équivalentes, elles ont le même comportement à l'infini. Si l'une des deux suites admet des propriétés à l'infini, l'autre aussi. Cela permet de se ramener à des suites plus simples.
Exemple : $log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ ou encore $(1+\frac{1}{n})^p - 1 \sim p\frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$.

PARTIE 4 - ÉQUIVALENT DE LA SUITE $(I_n)_n$.

— 1. Soit $n > 2$. Montrer que $I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$.
— 2. Pourquoi la suite $(I_n)_n$ ne s'annule pas ? Montrer $I_n \sim I_{n-1}$.
— 3. Montrer que $I_nI_{n-1} \sim \frac{\pi}{2n}$
— 4. En déduire $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

QUESTION BONUS :
— Écrire un programme calculant (I_n) pour tout entier naturel n.

Exercice 2 : Formulaire trigonométrique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On rappelle que $e^{i\theta}$ s'écrit sous forme trigonométrique $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$.
On rappelle aussi que si $z \in \mathbb{C}$ alors $|z| = \sqrt{\mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2}$.

— 1. Montrer que $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$.
— 2. Montrer que $cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.
— 3. Montrer que $sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
— 4. On prend $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que

$$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y) \tag{1}$$

— 5. En déduire $cos(x-y)$.

On prend $x, y \in \mathbb{R}$, on admet la formule pour sin (même calcul que pour cos) :

$$sin(x+y) = sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y) \tag{2}$$

$$sin(x-y) = sin(x)cos(y) - cos(x)sin(y) \tag{3}$$

— 6. Montrer que $cos(2\theta) = 2cos(\theta)^2 - 1$.

Avec l'exact même raisonnement, on a $sin(2\theta) = 2cos(\theta)sin(\theta)$.

— 7. Vérifier l'égalité

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

— 8. Calculer $cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$.
— 9. Calculer $cos(\frac{\pi}{8})$.

Indication : on connaît $cos(\dfrac{\pi}{4})$.

Exercice 3 : Maximum

Déterminer le maximum de la fonction f qui à $x \in \mathbb{R}$ associe

$$f(x) = cos(x)^2 - cos(x)$$

Exercice 4 : Inégalité

Déterminer les réels x de $[0; 2\pi]$ tels que

$$sin(x) \geq cos(x)$$

Exercice 5 : Égalité

Donner tous les nombres réels tels que $cos(3x) = sin(2x)$.

Exercice 6 : Second degré

Résoudre $sin(\frac{\pi}{2} - x)^2 + 3cos(x) - 4 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 : Intégrale

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(x)}{cos^2(x)} dx$.

Exercice 8 : Somme

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- 1. Soit $0 < q < 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.
- 2. Pour tout $0 \leq k \leq n$, en vous aidant de la question 2. de l'exercice 2, que vaut $cos(k\theta)$?
- 3. Si $\theta = 0$, calculer $S = 1 + cos(\theta) + cos(2\theta) + \ldots + cos(n\theta)$.
- 4. On suppose dans la suite $\theta \neq 0$. Montrer

$$S = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 + \ldots + (e^{i\theta})^n) + \frac{1}{2}(1 + e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2 + \ldots + (-e^{i\theta})^n)$$

- 5. En déduire

$$S = \frac{1}{2}(\frac{1 - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}} + \frac{1 - e^{-(n+1)i\theta}}{1 - e^{-i\theta}})$$

- 6. Montrer $e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2} \cdot 2sin(\frac{\theta}{2})$.
  On admet de même :

$$e^{-i\theta} - 1 = e^{-i\frac{\theta}{2}} \cdot 2sin(\frac{\theta}{2})$$

$$e^{(n+1)\cdot i\theta} - 1 = e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \cdot 2sin(\frac{(n+1)\theta}{2})$$

$$e^{-(n+1)\cdot i\theta} - 1 = e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} \cdot 2sin(\frac{(n+1)\theta}{2})$$

- 7. En déduire

$$S = cos(\frac{n\theta}{2})\frac{sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{sin(\frac{\theta}{2})} \tag{4}$$